

## CURS 16 ORA I

În cursurile precedente am considerat derivata unei funcții care are domeniul și codomeniul din  $\mathbb{R}$  și am constatat că aceasta constituie instrumentul adecvat pentru a determina punctele de extrem local ale funcției, pentru a calcula anumite limite sau pentru a aproxima soluțiile unor ecuații. Deoarece determinarea punctelor de extrem constituie o problemă centrală în multe ramuri ale științei și pentru că în modelarea fenomenelor naturale apar, de obicei, funcții de mai multe variabile, vom încerca să construim un instrument asemănător, adecvat acestui caz, care să servească aceluiași scop.

Începem prin a reaminti noțiunea de funcție derivabilă.

**Definiție.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $c \in D \cap D'$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă există (în  $\overline{\mathbb{R}}$ ), limita  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  se numește derivata lui  $f$  în  $c$  și se notează  $f'(c)$ . Dacă  $f'(c)$  este finită, spunem că  $f$  este derivabilă în  $c$ .

Definiția de mai sus (cu impunerea suplimentară ca limita considerată să existe în  $\mathbb{R}$ ) este valabilă și în cazul în care  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ , cu modificarea că, în acest caz,  $f'(c) \in \mathbb{R}^q$ .

Acest fapt este demn de remarcat, căci o funcție  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^q$ , unde  $I$  este un interval din  $\mathbb{R}$ , este o curbă din  $\mathbb{R}^q$ , iar derivata sa în  $c$ , când există, generează un vector tangent la curbă în punctul  $f(c)$ . Altfel, dacă gândim pe  $x$  ca fiind timpul, funcția  $f$  furnizează traiectoria unui punct din  $\mathbb{R}^q$ , iar derivata sa în  $c$ , când există, reprezintă viteza punctului la momentul  $c$ .

O privire atentă asupra definiției anterioare arată că unicul loc în care se folosește faptul că funcția considerată are domeniul din  $\mathbb{R}$  este atunci când se consideră câtul  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ . Această expresie nu mai are semnificație pentru o funcție cu domeniu din  $\mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ .

O cale de a ataca problema ridicată mai sus este de a "tăia" domeniul funcției cu drepte ce trec prin  $c$ . Mai precis:

**Definiție.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $c \in \overset{\circ}{D}$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Un vector  $L_u \in \mathbb{R}^q$  se numește derivata lui  $f$  în punctul  $c$  după vectorul  $u$  (sau după direcția  $u$ , dacă  $\|u\| = 1$ ), dacă există limita  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t}$  și

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c + tu) - f(c)}{t} = L_u.$$

**Observație.**  $L_u$ , dacă există, este unic și se notează  $f'_u(c)$  sau  $\frac{df}{du}(c)$ .

Notăm cu  $f'_u$  sau cu  $\frac{df}{du}$  funcția rezultantă, care are valori în  $\mathbb{R}^q$  și domeniul constând din acele puncte din  $D$  în care există limita  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t}$ .

**Definiție.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $c \in \overset{\circ}{D}$ ,  $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$ , unde 1 este pe poziția  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

Derivata lui  $f$  după vectorul  $e_i$  în punctul  $c$  (dacă există) se numește derivata parțială a lui  $f$  în  $c$  în raport cu variabila  $x_i$  și se notează cu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c).$$

Dacă există derivata parțială a lui  $f$  în orice punct din  $D$ , funcția rezultantă se numește derivata parțială a lui  $f$  în raport cu variabila  $x_i$  și se notează cu  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

Funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , descrisă de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 - y^2}, & x^3 - y^2 \neq 0 \\ 0, & x^3 - y^2 = 0 \end{cases},$$

are următoarele proprietăți:

- i) există  $\frac{df}{dv}(0, 0)$ , pentru orice  $v \in \mathbb{R}^2$ ;
- ii) nu este continuă în  $(0, 0)$ .

Într-adevăr:

- i) Pentru orice  $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  cu  $\beta \neq 0$ , avem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f((0, 0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 \beta}{t\alpha^3 - \beta^2} = -\frac{\alpha^2}{\beta},$$

i.e. există  $\frac{df}{dv}(0, 0)$  și

$$\frac{df}{dv}(0, 0) = -\frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Pentru orice  $v = (\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2$ , avem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f((0, 0))}{t} = 0,$$

i.e. există  $\frac{df}{dv}(0, 0)$  și

$$\frac{df}{dv}(0, 0) = 0.$$

Așadar  $f$  are derivată după orice direcție în origine.

ii) Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2} - \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^3}}\right)\right) = 1 \neq 0 = f(0, 0),$$

deducem că  $f$  nu este continuă în  $(0, 0)$ .

Așadar este posibil ca o funcție care are derivată într-un punct după orice direcție, să nu fie continuă în acel punct.

De asemenea, este posibil ca o funcție să aibă, într-un punct, derivată după o anumită direcție, dar să nu aibă, în același punct, derivată după o altă direcție.

Toate aceste lucruri arată că noțiunea de derivată a unei funcții după o direcție, deși marchează un progres în căutările noastre, nu este instrumentul dorit.

Pentru a rezolva problema trebuie să privim definiția funcției derivabile din cazul 1-dimensional într-un alt mod. Mai precis, reamintim următoarea:

**Teorema de caracterizare a funcțiilor derivabile.** Fie  $U = \overset{\circ}{U} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $c \in U$  și  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i) Funcția  $f$  este derivabilă în  $c$ .

ii) Există o aplicație liniară  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (i.e.  $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ , pentru orice  $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ ) astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{|x - c|} = 0.$$

Această nouă abordare ne conduce la următoarea:

**Definiție.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $c \in \overset{\circ}{D}$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Spunem că  $f$  este diferentiabilă (sau derivabilă) în  $c$  dacă există o aplicație liniară  $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  (i.e.  $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$  pentru orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^p$ ) astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{\|x - c\|} = 0.$$

**Observație.**  $L$ , dacă există, este unică și se notează cu  $Df(c)$  sau  $f'(c)$  și se numește diferențiala (sau derivata) lui  $f$  în punctul  $c$ .

## CURS 16 ORA II

**Teorema de continuitate a funcțiilor diferențiabile.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $c \in \overset{\circ}{D}$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Dacă  $f$  este diferențiabilă în  $c$ , atunci există  $\delta, K > 0$  astfel încât

$$\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\|,$$

pentru orice  $x \in D$  cu proprietatea că  $\|x - c\| < \delta$ .

În particular,  $f$  este continuă în  $c$ .

*Demonstrație.* Conform ipotezei, există o aplicație liniară  $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{\|x - c\|} = 0$ , deci (alegând  $\varepsilon = 1$  în definiția cu  $\varepsilon$  și  $\delta$  a limitei unei funcții într-un punct) există  $\delta > 0$  cu proprietatea că

$$\|f(x) - f(c) - L(x - c)\| \leq \|x - c\|,$$

pentru orice  $x \in D$ ,  $\|x - c\| < \delta$ , de unde, utilizând inegalitatea triunghiului, obținem

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \|L(x - c)\| + \|x - c\|,$$

pentru un astfel de  $x$ .

Teorema de continuitate a aplicațiilor liniare între spații vectoriale finit dimensionale asigură existența unui  $M \geq 0$  cu proprietatea că

$$\|L(x - c)\| \leq M \|x - c\|,$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}^p$ .

Prin urmare

$$\|f(x) - f(c)\| \leq (M + 1) \|x - c\|,$$

pentru orice  $x \in D$  astfel încât  $\|x - c\| < \delta$  și alegem  $K = M + 1$ .

Din inegalitatea anterioară rezultă imediat continuitatea lui  $f$  în  $c$  (folosind, spre exemplu, caracterizarea cu șiruri a acesteia).  $\square$

**Teorema privind derivabilitatea după o direcție a funcțiilor diferențiabile.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $c \in \overset{\circ}{D}$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$  astfel încât  $f$  este diferențiabilă în  $c$ . Atunci:

- $\alpha)$  Există  $\frac{df}{du}(c)$ .
- $\beta)$

$$\frac{df}{du}(c) = Df(c)(u),$$

pentru orice  $u \in \mathbb{R}^p$ .

În particular, există  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$  și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = Df(c)(e_i),$$

pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

*Demonstrație.* Având în vedere diferențiabilitatea lui  $f$  în  $c$ , obținem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c + tu) - f(c) - Df(c)(c + tu - c)}{\|c + tu - c\|} = 0,$$

i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c + tu) - f(c) - tDf(c)(u)}{|t|} = 0.$$

Prin urmare

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c + tu) - f(c) - tDf(c)(u)}{|t|} \cdot \frac{|t|}{t} = 0,$$

i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c + tu) - f(c)}{t} = Df(c)(u),$$

deci există  $\frac{df}{du}(c)$  și

$$\frac{df}{du}(c) = Df(c)(u),$$

pentru orice  $u \in \mathbb{R}^p$ .  $\square$

În continuare vom face câteva considerații privind diferențiabilitatea unei funcții  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$  într-un punct  $c \in \overset{\circ}{D}$ , unde  $D \subseteq \mathbb{R}^p$ .

**1.** Pentru  $p = q = 1$ , funcția  $f$  este diferențiabilă în  $c$  dacă și numai dacă  $f$  este derivabilă în  $c$  și  $Df(c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este dată de

$$Df(c)(u) = f'(c)u,$$

pentru orice  $u \in \mathbb{R}$ .

**2.** Pentru  $p = 1, q > 1$ , funcția  $f$  are componentele  $f_1, f_2, \dots, f_q$ , deci

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_q).$$

Atunci  $f$  este diferențiabilă în  $c$  dacă și numai dacă  $f_1, f_2, \dots, f_q$  sunt diferențiabile în  $c$  și  $Df(c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$  este dată de

$$Df(c)(u) = (f'_1(c)u, f'_2(c)u, \dots, f'_q(c)u) = u(f'_1(c), f'_2(c), \dots, f'_q(c)),$$

pentru orice  $u \in \mathbb{R}$ .

**3.** Pentru  $p > 1$ ,  $q = 1$ , dacă  $f$  este diferențiabilă în  $c$ , atunci există  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$  pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Existența tuturor derivatelor parțiale în  $c$ , nu este, în general, o condiție suficientă pentru diferențiabilitatea funcției  $f$  în  $c$ .

Funcția  $Df(c) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  este dată de

$$Df(c)(u_1, u_2, \dots, u_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)u_p,$$

pentru orice  $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ , deoarece, ținând cont de liniaritatea funcției  $Df(c)$ , avem

$$\begin{aligned} Df(c)(u_1, u_2, \dots, u_p) &= Df(c)(u_1e_1 + u_2e_2 + \dots + u_pe_p) = \\ &= u_1Df(c)(e_1) + \dots + u_pDf(c)(e_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)u_p. \end{aligned}$$

**Observație.** Orice funcție liniară  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  este diferențiabilă în orice  $c \in \mathbb{R}^p$  și

$$Df(c) = f.$$

În particular, aplicațiile  $pr_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  date de

$$pr_i(u_1, u_2, \dots, u_p) = u_i,$$

pentru orice  $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$  și orice  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , sunt liniare, deci

$$Dpr_i(c) = pr_i,$$

pentru orice  $c \in \mathbb{R}^p$ , fapt care justifică notația

$$pr_i = dx_i.$$

Atunci, cu aceste notații, avem

$$\begin{aligned} Df(c)(u_1, u_2, \dots, u_p) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)u_p = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)pr_1(u_1, u_2, \dots, u_p) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)pr_p(u_1, u_2, \dots, u_p) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1(u_1, u_2, \dots, u_p) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)dx_p(u_1, u_2, \dots, u_p), \end{aligned}$$

pentru orice  $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$  (avem mai sus o egalitate de numere reale),  
adică

$$Df(c) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)dx_p = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)dx_i,$$

care este o egalitate de aplicații liniare din  $\mathbb{R}^p$  în  $\mathbb{R}$ .

### CURS 16 ORA III

4. Pentru  $p, q > 1$  și  $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  diferențiabilitatea lui  $f$  în  $c$  echivalează cu diferențiabilitatea funcțiilor  $f_1, f_2, \dots, f_q$  în  $c$ .

Dacă  $f$  este diferențiabilă în  $c$ , atunci există  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ , pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Mai mult,  $Df(c) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  este dată de

$$Df(c) = (Df_1(c), \dots, Df_q(c)),$$

deci

$$Df(c)(u_1, u_2, \dots, u_p) = (Df_1(c)(u_1, u_2, \dots, u_p), \dots, Df_q(c)(u_1, u_2, \dots, u_p)),$$

de unde

$$Df(c)(u_1, u_2, \dots, u_p) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c)u_p, \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c)u_p \right),$$

pentru orice  $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ .

Matricea asociată acestei aplicații liniare, pentru perechea de baze canonice, este

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix}.$$

Această matrice se numește matricea Jacobi a lui  $f$  în  $c$  și se notează  $J_f(c)$ .

Când  $p = q$ , determinantul acestei matrici poartă numele de Jacobianul lui  $f$  în  $c$  și se notează  $\det J_f(c)$  sau  $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_p)}(c)$ .

Am văzut că diferențiabilitatea unei funcții într-un punct implică existența tuturor derivatelor parțiale în acel punct, deci existența derivatelor parțiale într-un punct este o condiție necesară pentru diferențiabilitatea în acel punct. Ea nu este însă și o condiție suficientă.

**Criteriul de diferențiabilitate.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $c \in \overset{\circ}{D}$ ,  $V \in \mathcal{V}_c$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$  satisfăcând următoarele două proprietăți:

i) există derivatele parțiale în orice punct din  $V$ ;

ii) derivatele parțiale sunt continue în  $c$ .

Atunci  $f$  este diferențiabilă în  $c$ .

*Demonstrație.* Așa cum am văzut mai sus, este suficient să considerăm cazul  $q = 1$ .

Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar, dar fixat.

Continuitatea derivatelor parțiale ne asigură că există  $\delta_\varepsilon > 0$  astfel încât

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right| < \varepsilon, \quad (1)$$

pentru orice  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  și orice  $y \in B(c, \delta_\varepsilon) \subseteq D$ .

Dacă  $x = (x_1, \dots, x_p) \in B(c, \delta_\varepsilon)$  și  $c = (c_1, \dots, c_p)$ , considerând vectorii

$$u_0 = x = (x_1, x_2, \dots, x_p),$$

$$u_1 = (c_1, x_2, \dots, x_p),$$

$$u_2 = (c_1, c_2, x_3, \dots, x_p),$$

...

$$u_{p-1} = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_{p-1}, x_p)$$

și

$$u_p = c = (c_1, \dots, c_p),$$

avem

$$f(x) - f(c) = \sum_{j=1}^p (f(u_{j-1}) - f(u_j)).$$

Pentru orice  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ , Teorema lui Lagrange, aplicată funcției  $h$ , definită pe intervalul de capete  $c_j$  și  $x_j$ , dată de

$$h(t) = f(c_1, \dots, c_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_p),$$

pentru orice  $t$ , ne asigură existența unui  $\theta_j$  între  $c_j$  și  $x_j$  astfel încât

$$h(x_j) - h(c_j) = h'(\theta_j)(x_j - c_j).$$

Cum

$$h(x_j) = f(u_{j-1}),$$

$$h(c_j) = f(u_j)$$

și

$$\begin{aligned} h'(\theta_j) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(\theta_j + t) - h(\theta_j)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c_1, \dots, c_{j-1}, \theta_j + t, x_{j+1}, \dots, x_p) - f(c_1, \dots, c_{j-1}, \theta_j, x_{j+1}, \dots, x_p)}{t} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(c_1, \dots, c_{j-1}, \theta_j, x_{j+1}, \dots, x_p), \end{aligned}$$

avem

$$f(u_{j-1}) - f(u_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j)(x_j - c_j),$$

unde

$$\xi_j = (c_1, \dots, c_{j-1}, \theta_j, x_{j+1}, \dots, x_p).$$

Atunci

$$f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) = \sum_{j=1}^p (x_j - c_j) \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right). \quad (2)$$

Pentru  $\|x - c\| < \delta_\varepsilon$  și  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ , avem

$$\begin{aligned} \|\xi_j - c\| &= \sqrt{(\theta_j - c_j)^2 + (x_{j+1} - c_{j+1})^2 + \dots + (x_p - c_p)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(x_j - c_j)^2 + (x_{j+1} - c_{j+1})^2 + \dots + (x_p - c_p)^2} \leq \|x - c\| < \delta_\varepsilon, \end{aligned}$$

deci, conform cu (1),

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right| < \varepsilon,$$

de unde, folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz și (2), obținem

$$\left| f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) \right| \leq \sum_{j=1}^p |x_j - c_j| \varepsilon \leq \|x - c\| \varepsilon \sqrt{p}.$$

Prin urmare,  $f$  este diferențiabilă în  $c$  și diferențiala sa în  $c$  este descrisă de egalitatea următoare:

$$Df(c)(z_1, z_2, \dots, z_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)z_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)z_p,$$

pentru orice  $(z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{R}^p$ .  $\square$

**Obsevație.** *Reciproca teoremei de mai sus nu este validă.*

Funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , descrisă de

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

are următoarele proprietăți:

- i) există  $\frac{\partial f}{\partial x}$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  și nu sunt continue în  $(0, 0)$ ;
- iii) este diferențiabilă în  $(0, 0)$ .

Într-adevăr:

i) Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \right) = -\infty,$$

deducem că  $\frac{\partial f}{\partial x}$  nu este continuă în  $(0, 0)$ .

Similar avem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  nu este continuă în  $(0, 0)$ .

ii) Deoarece

$$0 \leq \left| \frac{xy \sin \frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

și

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0,$$

deducem că

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

i.e.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - [\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y]}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

deci  $f$  este diferențiabilă în  $(0,0)$  și

$$Df(0,0) = 0.$$